УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ АВТОРЕПРОДУКЦИИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Кузенков О.А., Новоженин А.В.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород

Поступила в редакцию 27.09.2014, после переработки 30.09.2014.

Устанавливаются необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для системы автрепродукции в банаховом пространстве.

Ключевые слова: система авторепродукции, банахово пространство, оптимальное управление, принцип максимума.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 7–20.

Введение

В теории оптимального управления большое значение имеет изучение условий оптимальности для систем, заданных дифференциальным уравнением в банаховом пространстве. Известно, что с помощью этих уравнений может быть описано поведение огромного числа реальных систем самой различной природы. Тем самым изучение таких уравнений позволяет получить результаты общего вида. Кроме того, при этом сохраняются важнейшие черты, присущие динамическим системам, благодаря чему возможно относительно несложное применение результатов в каждом конкретном случае.

Перспективность рассмотрения уравнений в банаховом пространстве для теории оптимального управления привлекала к ним внимание многих исследователей, начиная с первых этапов развития теории оптимального уравнения (см., например, [1–5], [6, с. 326-378], [7,8]). Интерес к ним не ослабевает до сих пор (см., например, [9–12]). Вместе с тем изучение управляемой системы в банаховом пространстве в самом общем виде является весьма сложной проблемой, которая сейчас еще далека от окончательного решения, о чем свидетельствуют вновь появляющиеся работы на эту тему. Ввиду большой сложности общей проблемы исследование проводится по различным классам систем в банаховом пространстве с учетом конкретных особенностей каждого класса (см., например, [10,11]). При этом практическую ценность, в первую очередь, представляют не те результаты, которые

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-12452 офи-м).

выполняются для максимально общих классов систем, а удобные для использования, то есть те, проверка условий применимости которых и использование в каждой конкретной ситуации не превращается в слишком сложную самостоятельную проблему.

В настоящей работе выводятся необходимые условия оптимальности для системы в банаховом пространстве, которая является обобщенным описанием систем авторепродукции. Разнообразные системы авторепродукции: биологические, экономические, информационные – широко распространены в окружающей действительности. В работах А.Н. Горбаня [13] было дано общее описание одного класса систем авторепродукции – систем с наследованием – в виде дифференциального уравнения в банаховом пространстве конечных мер. Общий случай системы авторепродукции также можно представить как дифференциальное уравнение в банаховом пространстве мер, обладающее дополнительными особенностями – неотрицательностью решения и обращением в ноль производной решения на нулевом элементе [14, 15]. В работах [16, 17] было дано общее представление систем динамики вероятностных мер, которое по существу сводило рассмотрение их к случаю однородного уравнения. В настоящей статье доказывается теорема в форме принципа максимума именно для однородной системы в банаховом пространстве, что позволяет эффективно применять ее для широкого класса обобщенных уравнений авторепродукции.

1. Управляемая система

Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство, норму в нем обозначим как $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$. Множество линейных ограниченных операторов, отображающих пространство $\mathfrak{B}$ само в себя, будем обозначать как $[\mathfrak{B}]$. Это множество является банаховым пространством, норму элементов которого будем обозначать $\|\cdot\|_{[\mathfrak{B}]}$. Пусть оператор $A : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ – линейный, замкнутый с областью определения $\mathfrak{D}(A)$, плотной в $\mathfrak{B}$. Пусть резольвента $R(\lambda, A)$ оператора A удовлетворяет условию $\|[R(\lambda, A)]^n\| \leqslant M\lambda^{-n}$ при $\lambda > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, где значения λ принадлежат резольвентному множеству оператора A, M – некоторая константа. При выполнении этих условий оператор A порождает некоторую полугруппу операторов $S(t, A)$ класса C_0 [18, с. 373-377]. Пусть все то же справедливо и для оператора A^* – сопряженного к оператору A; $A^* : \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*$.

Векторная функция $z(\xi)$, определенная на каком-либо множестве $\Omega \in R^1$ со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, называется сильно непрерывной в точке $\xi = \xi_0$, если $\lim\limits_{\xi\to\xi_0} \|z(\xi) - z(\xi_0)\|_{\mathfrak{B}} = 0$.

Пусть T – время управления, t – скалярная переменная времени, $t \in [0, T]$. Пусть задано некоторое подмножество G во множестве $[\mathfrak{B}]$, каждому значению $t \in [0, T]$ поставлен в соответствие оператор $U(t) \in G \subset [\mathfrak{B}]$, тогда на отрезке $[0, T]$ определена оператор-функция $U(t) : [0, T] \to G \subset [\mathfrak{B}]$. Предположим, что эта функция сильно непрерывная во всех точках отрезка $[0, T]$, кроме конечного числа точек t_k, в которых тем не менее существуют и конечны сильные пределы функции слева и справа: $U(t_k - 0)$, $U(t_k + 0)$. Такие функции условимся называть сильно кусочно-непрерывными. Пусть при каждом значении $t \in [0, T]$ оператор $U(t)$ имеет сопряженный $U^*(t) : \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*$. Множество линейных ограниченных операторов, отображающих пространство $\mathfrak{B}^*$ само в себя, будем обозначать как $[\mathfrak{B}^*]$. Пусть оператор-функция $U^*(t) : [0, T] \to [\mathfrak{B}^*]$ сильно кусочно-непрерывна.

Пусть $x = x(t)$ – функция, зависящая от времени, переводящая R^1 в банахово пространство $\mathfrak{B}$; $x(t) : R^1 \to \mathfrak{B}$; $\dot{x}$ – производная этой функции по времени [18, с. 72]. Пусть вектор-функция $g(x, t)$ – сильно непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица

$$\|g(x_1, t) - g(x_2, t)\| < c\|x_1 - x_2\|$$

при всех $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}$. Ее производная по Гато $\frac{\partial g}{\partial x}$ является линейным ограниченным оператором, обозначим его $G_c(x, t)$. Пусть оператор $G_c(x, t)$ имеет сопряженный $G_c^*(x, t)$, непрерывный по совокупности переменных, удовлетворяющий условию Липшица по переменной x. Рассмотрим квазилинейное неоднородное уравнение следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + U(t)x + g(x, t). \tag{1}$$

Предположим, что задано начальное условие:

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Существование и единственность решения задачи Коши (1)-(2) доказаны в [19, с. 468-472]. Покажем, в какой форме можно его представить. Будем искать решение в виде:

$$x = S(t, A)y, \tag{3}$$

где $S(t, A)$ – полугруппа операторов класса C_0 [18, с. 334-339], порожденная оператором A; $y = y(t)$ – функция, зависящая от времени, переводящая R^1 в банахово пространство $\mathfrak{B}$, дифференцируемая по t; $y : [0, T] \to \mathfrak{B}$. Совершая подстановку (3) в (1) и (2), приходим к равенствам [18, с. 634]: $AS(t, A)y + S(t, A)\dot{y} = AS(t, A)y + U(t)S(t, A)y + g(S(t, A)y, t)$, $y(0) = x_0$. Отсюда получаем задачу Коши для неоднородного дифференциального уравнения относительно переменной y:

$$\dot{y} = S^{-1}(t, A)U(t)S(t, A)y + S^{-1}(t, A)g(S(t, A)y, t), \quad y(0) = x_0. \tag{4}$$

Введем обозначение $C(t) = S^{-1}(t, A)U(t)S(t, A)$. Оператор-функция $C(t)$ будет сильно кусочно-непрерывной на отрезке $[0, T]$. Кроме того, для полугруппы $S(t, A)$ справедливо следующее свойство [18, с. 331-338]: $\|S(t, A)\|_{[\mathfrak{B}]} \leqslant M$, где M – константа, не зависящая от t. По теореме Банаха об обратном операторе [20, с. 225-228] оператор-функция $S^{-1}(t, A)$ также будет ограниченной. Таким образом, функция $C(t)$ ограничена по операторной норме равномерно по t некоторой константой k, $\|C(t)\|_{[\mathfrak{B}]} \leqslant k$.

Введем в рассмотрение линейный оператор, определенный суммой ряда:

$$D(t) = I + \int_0^t C(t_1)dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} C(t_n)C(t_{n-1}) \ldots C(t_1)dt_1 \ldots dt_n.$$

Этот ряд сходится равномерно по операторной норме $\| \cdot \|_{[\mathfrak{B}]}$ на отрезке $[0, T]$ [21, с. 141-145]. Тогда решение задачи Коши (4) удовлетворяет следующему интегральному уравнению [21, с. 138-148]:

$$y = D(t, 0)x_0 + \int_0^t D(t, \tau)S^{-1}(\tau, A)g(S(t, A)y, \tau)d\tau,$$

где $D(t,\tau) = D(t)D^{-1}(\tau)$ – эволюционный оператор. Следовательно, решение задачи Коши (1)-(2) будет представляться в виде:

$$x = S(t,A)D(t,0)x_0 + S(t,A)\int\limits_0^t D(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)g(x,\tau)d\tau. \tag{5}$$

Заметим, что для эволюционного оператора справедливо следующее свойство [21, с. 148]:

$$\|D(t,\tau)\|_{[\mathfrak{B}]} \leqslant \exp\Big[\int\limits_\tau^t \|C(s)\|_{[\mathfrak{B}]}ds\Big] \quad (\tau \leqslant t). \tag{6}$$

2. Оптимизационная задача

Перейдем к постановке оптимизационной задачи. Будем рассматривать нелинейное уравнение (1) с начальным условием (2). Функция $U(t)$ задает управляющее воздействие на систему (1).

Пусть $F_1(x,t) : \mathfrak{B} \times R^1 \to R^1$, $F_2(U,t) : [\mathfrak{B}] \times R^1 \to R^1$, $\Phi(x) : \mathfrak{B} \to R^1$ – непрерывные функционалы по совокупности своих переменных, $\partial F_1/\partial x$, $\partial \Phi/\partial x$ – их производные по Гато, непрерывные по совокупности своих переменных, удовлетворяющие условию Липшица по переменной x. Пусть задан критерий качества управления следующего вида:

$$J_0 = \int\limits_0^T (F_1(x(t),t) + F_2(U(t),t))dt + \Phi(x(T)). \tag{7}$$

Требуется найти функцию $U(t)$, сильно кусочно-непрерывную, принимающую значение из множества G, на которой функционал J_0 принимает наименьшее возможное значение.

Цель исследования состоит в выводе необходимых условий оптимальности управления в поставленной задаче. Дальнейшие построения будут основываться на известной методике Л.С. Понтрягина [22, С.86-124], использующей семейство функций сравнения.

Пусть $\overline{U}(t)$ является оптимальным управлением относительно введенного критерия. Зададим семейство функций сравнения в виде:

$$U_\varepsilon(t) = U(t,\tau,\overline{U},\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}(t) & \text{при } 0 \leqslant t < \tau-\varepsilon,\ \tau < t \leqslant T, \\ U & \text{при } \tau-\varepsilon \leqslant t \leqslant \tau, \end{cases} \tag{8}$$

где $U \in G \subset [\mathfrak{B}]$, $\varepsilon > 0$, $0 < \tau < T$. Ясно, что при любых значениях τ, U и при достаточно малых ε справедлива принадлежность $U_\varepsilon(t) \in G \subset [\mathfrak{B}]$.

Очевидно, $U_\varepsilon(t)$ сильно сходится к $\overline{U}(t)$ при $\varepsilon \to 0$ поточечно по норме $\|\cdot\|_{[\mathfrak{B}]}$ за исключением точки $t = \tau$.

Пусть $\overline{x}(\cdot)$ – траектория, соответствующая оптимальному управлению $\overline{U}(\cdot)$, $x_\varepsilon(\cdot)$ – траектория, соответствующая $U_\varepsilon(\cdot)$, а $\triangle_\varepsilon x = x_\varepsilon - \overline{x}$.

Лемма 1. *Функция x_ε стремится сильно к $\overline{x}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на отрезке $[0, T]$.*

Доказательство. Утверждение леммы эквивалентно утверждению: $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|\triangle_\varepsilon x(t)\|_{\mathfrak{B}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Введем обозначения $C_\varepsilon(t) = S^{-1}(t,A)U_\varepsilon(t)S(t,A)$ и $\overline{C}(t) = S^{-1}(t,A)\overline{U}(t)S(t,A)$. Воспользовавшись формулой (5), получаем:

$$\triangle_\varepsilon x(t) = S(t,A)D_\varepsilon(t,0)x_0 - S(t,A)\overline{D}(t,0)x_0 + S(t,A)\int\limits_0^t D_\varepsilon(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)g(x_\varepsilon,\tau)d\tau -$$

$$-S(t,A)\int\limits_0^t \overline{D}(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)g(\overline{x},\tau)d\tau,$$

где

$$D_\varepsilon(t,0) = I + \int\limits_0^t C_\varepsilon(t_1)dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_n}\ldots\int\limits_0^{t_2} C_\varepsilon(t_n)C_\varepsilon(t_{n-1})\ldots C_\varepsilon(t_1)dt_1\ldots dt_n,$$

$$\overline{D}(t,0) = I + \int\limits_0^t \overline{C}(t_1)dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_n}\ldots\int\limits_0^{t_2} \overline{C}(t_n)\overline{C}(t_{n-1})\ldots \overline{C}(t_1)dt_1\ldots dt_n.$$

Введем обозначение $R_\varepsilon = S(t,A)D_\varepsilon(t,0)x_0 - S(t,A)\overline{D}(t,0)x_0$. Справедливо следующее неравенство

$$\|\triangle_\varepsilon x(t)\| \leqslant \|R_\varepsilon\| + \|S(t,A)\int\limits_0^t (D_\varepsilon(t,\tau) - \overline{D}(t,\tau))S^{-1}(\tau,A)g(\overline{x},\tau)d\tau\| +$$

$$+\|S(t,A)\int\limits_0^t D_\varepsilon(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)(g(x_\varepsilon,\tau) - g(\overline{x},\tau))d\tau\|.$$

Вектор-функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица $\|g(x_\varepsilon,\tau) - g(\overline{x},\tau)\| \leqslant L\|\triangle_\varepsilon x(t)\|$. Учитывая это, приходим к выводу:

$$\|\triangle_\varepsilon x(t)\| \leqslant \|R_\varepsilon\| + \|S(t,A)\int\limits_0^t (D_\varepsilon(t,\tau) - \overline{D}(t,\tau))S^{-1}(\tau,A)g(\overline{x},\tau)d\tau\| +$$

$$+\|S(t,A)\int\limits_0^t D_\varepsilon(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)d\tau\| \cdot L\|\triangle_\varepsilon x(t)\|.$$

Справедливо неравенство

$$\|\triangle_\varepsilon x(t)\|(1 - \|S(t,A)\int\limits_0^t D_\varepsilon(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)d\tau\| \cdot L) \leqslant \|R_\varepsilon\| +$$

$$+\|S(t,A)\int\limits_0^t (D_\varepsilon(t,\tau)-\overline{D}(t,\tau))S^{-1}(\tau,A)g(\overline{x},\tau)d\tau\|.$$

Введем обозначение $K=\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|S(t,A)D_\varepsilon(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)\|\cdot L$. С учетом обозначения будет справедливо неравенство

$$\|\triangle_\varepsilon x(t)\|(1-Kt)\leqslant\|R_\varepsilon\|+\|S(t,A)\int\limits_0^t (D_\varepsilon(t,\tau)-\overline{D}(t,\tau))S^{-1}(\tau,A)g(\overline{x},\tau)d\tau\|.$$

За счет выбора константы K можно обеспечить справедливость неравенства $Kt\neq 1$ для $t\in[0,T]$. Если $K>1$, то отрезок $[0,T]$ необходимо разбить на конечное число отрезков длинной меньше $\frac{1}{K}$ и проводить дальнейшие рассуждения для каждого отрезка, тем самым обеспечив доказательство на всем отрезке $[0,T]$. Далее будем предполагать, что $K\cdot T<1$.

Покажем равномерную сходимость по норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ функции $S(t,A)D_\varepsilon(t,0)x_0$ к $S(t,A)\overline{D}(t,0)x_0$. Это утверждение эквивалентно следующему:

$$\max\|S(t,A)D_\varepsilon(t,0)x_0-S(t,A)\overline{D}(t,0)x_0\|_{\mathfrak{B}}\to 0 \;\text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Имеет место следующее равенство:

$$\|S(t,A)D_\varepsilon(t,0)x_0-S(t,A)\overline{D}(t,0)x_0\|_{\mathfrak{B}}=\|S(t,A)\|_{[\mathfrak{B}]}\|D_\varepsilon(t,0)-\overline{D}(t,0)\|_{[\mathfrak{B}]}\|x_0\|_{\mathfrak{B}}.$$

Для полугруппы $S(t,A)$ справедливо неравенство $\|S(t,A)\|_{[\mathfrak{B}]}\leqslant M$. Оператор-функция $\overline{C}(t)$ ограничена по операторной норме, т.е. $\|\overline{C}(t)\|_{[\mathfrak{B}]}\leqslant k_1$, где k_1 – некоторая константа. Для эволюционных операторов $D_\varepsilon(t,0)$ и $\overline{D}(t,0)$ справедлива следующая формула сравнения [21, с. 148]:

$$\|D_\varepsilon(t,0)-\overline{D}(t,0)\|_{[\mathfrak{B}]}\leqslant\exp\big[k_1 t\big](\exp\big[\int\limits_0^t\|C_\varepsilon(s)-\overline{C}(s)\|_{[\mathfrak{B}]}ds\big]-1). \tag{9}$$

Экспоненциальную функцию $e^{k_1 t}$ можно ограничить на отрезке $[0,T]$ константой k_2. Оператор-функции $C_\varepsilon(t)$ и $\overline{C}(t)$ совпадают всюду, за исключением отрезка $[\tau-\varepsilon,\tau]$. Учитывая это, приходим к выводу:

$$\max\|S(t,A)D_\varepsilon(t,0)x_0-S(t,A)\overline{D}(t,0)x_0\|_{\mathfrak{B}}\leqslant M\cdot k_2\cdot(\exp\big[\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\|C_\varepsilon(s)-\overline{C}(s)\|_{[\mathfrak{B}]}ds\big]-1).$$

Поскольку правая часть неравенства стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, то имеет место равномерная сходимость по норме в пространстве $\mathfrak{B}$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость по норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ функции $D_\varepsilon(t,s)S^{-1}(s,A)g(x_\varepsilon,s)$ к $\overline{D}(t,s)S^{-1}(s,A)g(x_\varepsilon,s)$ при $0\leqslant s,t\leqslant T$. Справедливо равенство:

$$\|D_\varepsilon(t,s)S^{-1}(s,A)g(x_\varepsilon,s)-\overline{D}(t,s)S^{-1}(s,A)g(x_\varepsilon,s)\|_{\mathfrak{B}}=$$

$$= \|D_\varepsilon(t,s) - \overline{D}(t,s)\|_{[\mathfrak{B}]} \|S^{-1}(s,A)\|_{[\mathfrak{B}]} \|g(x_\varepsilon,s)\|_{\mathfrak{B}}.$$

Учитывая формулу сравнения эволюционных операторов (9), свойства полугруппы $S(t,A)$, а также то, что оператор-функции $C_\varepsilon(s)$ и $C(s)$ совпадают всюду, за исключением отрезка $[\tau-\varepsilon,\tau]$, приходим к оценке:

$$\max \|D_\varepsilon(t,s)S^{-1}(s,A)g(x_\varepsilon,s) - \overline{D}(t,s)S^{-1}(s,A)g(x_\varepsilon,s)\|_{\mathfrak{B}} \leqslant$$

$$\leqslant k_3(\exp\Big[\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \|C_\varepsilon(s) - C(s)\|_{[\mathfrak{B}]} ds\Big] - 1),$$

где k_3 – константа. Правая часть неравенства стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует равномерная сходимость функции $D_\varepsilon(t,s)S^{-1}(s,A)g(x_\varepsilon,s)$ к $\overline{D}(t,s)S^{-1}(s,A)g(x_\varepsilon,s)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$. Применяя теорему о предельном переходе под знаком интеграла [24], получаем, что $\int\limits_0^t D_\varepsilon(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)g(x_\varepsilon,\tau)d\tau$ сходится сильно к $\int\limits_0^t \overline{D}(t,\tau)S^{-1}(\tau,A)g(x_\varepsilon,\tau)d\tau$ равномерно на $[0,T]$. Отсюда следует, что x_ε стремится сильно к $\overline{x}$ равномерно на отрезке $[0,T]$. □

3. Сопряженная система

Сопряженной системой в задаче (1) называется система следующего вида:

$$\dot{\psi}_0 = -A^*\psi_0 - \psi_0\overline{U}(t) - \psi_0\frac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}(t),t) - \frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t),t), \tag{10}$$

а условия:

$$\psi_0(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\overline{x}(T)) \tag{11}$$

называются условиями трансверсальности.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{gathered}\dot{\psi}_\varepsilon = -A^*\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon U_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon \tfrac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}(t) + \zeta\triangle_\varepsilon x(t),t) - \tfrac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t)+\theta\triangle_\varepsilon x(t),t),\\ 0\leqslant\theta\leqslant 1, \quad 0\leqslant\zeta\leqslant 1,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\psi_\varepsilon(T) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\overline{x}(T) + \xi\triangle_\varepsilon x(T)), \quad 0\leqslant\xi\leqslant 1. \tag{13}$$

Имеет место

Лемма 2. *Функция $\psi_\varepsilon(\cdot)$ стремится сильно к $\psi_0(\cdot)$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t на отрезке $[0,T]$.*

Доказательство. Учитывая результаты [23], для доказательства леммы 2 достаточно показать равномерную сходимость по норме на отрезке $[0,T]$ функционалов

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t)+\theta\triangle_\varepsilon x(t),t) \to \frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t),t) \quad \text{при } \varepsilon\to 0$$

и сходимость условий трансверсальности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\overline{x}(T) + \xi \triangle_\varepsilon x(T)) \to \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\overline{x}(T)) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Воспользуемся условием Липшица для функции $\partial F_1/\partial x$:

$$\Big|\frac{\partial F_1}{\partial x}(\widehat{x}, t) - \frac{\partial F_1}{\partial x}(\widetilde{x}, t)\Big| < L\|\widehat{x} - \widetilde{x}\|_{\mathfrak{B}},$$

где L – константа, не зависящая от времени t. Поскольку $\triangle_\varepsilon x(t)$ равномерно стремится к нулю, то для каждого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon(\delta) > 0$, что для всех $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon(\delta)$ выполняется неравенство $\|\triangle_\varepsilon x(t)\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \delta$. Полагая $\widetilde{x} = \overline{x}(t)$, а $\widehat{x} = \overline{x} + \theta \triangle_\varepsilon x(t)$ для $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon(\delta)$ имеем

$$\Big|\frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t) + \theta \triangle_\varepsilon x(t), t) - \frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}, t)\Big| \leqslant \delta L.$$

Полученная оценка говорит о равномерной сходимости функционалов. Сходимость граничных условий следует из липшицевости функции $\partial \Phi/\partial x$ и сходимости приращения $\triangle_\varepsilon x(T)$ к 0 при ε, стремящемся к 0. Лемма 2 доказана. □

Найдем приращение функционала J_0 на семействе функций сравнения $U_\varepsilon(\cdot)$ по отношению к $\overline{U}(\cdot)$:

$$\triangle J_0 = J_0[U_\varepsilon] - J_0[\overline{U}] = \int\limits_0^T (F_1(x_\varepsilon(t), t) - F_1(\overline{x}(t), t))dt +$$

$$+ \int\limits_0^T (F_2(U_\varepsilon(t), t) - F_2(\overline{U}(t), t))dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) - \Phi(\overline{x}(T)). \tag{14}$$

В нормированных пространствах имеет место теорема о среднем [25, с. 147-148]. По этой теореме в нашем случае справедливо представление:

$$F_1(x_\varepsilon(t), t) - F_1(\overline{x}(t), t) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t) + \theta \triangle_\varepsilon x(t), t)\triangle_\varepsilon x(t), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{15}$$

Кроме того,

$$\Phi(x_\varepsilon(T)) - \Phi(\overline{x}(T)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\overline{x}(T) + \xi \triangle_\varepsilon x(T))\triangle_\varepsilon x(T), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{16}$$

$$g(x_\varepsilon(t), t) - g(\overline{x}(t), t) = \frac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}(t) + \zeta \triangle_\varepsilon x(t), t)\triangle_\varepsilon x(t), \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1. \tag{17}$$

В силу (1) приращение $\triangle_\varepsilon x(T)$ удовлетворяет уравнению:

$$d(\triangle_\varepsilon x)/dt = A\triangle_\varepsilon x + U_\varepsilon(t)x_\varepsilon - \overline{U}(t)\overline{x} + g(x_\varepsilon, t) - g(\overline{x}, t) \tag{18}$$

с начальными условиями:

$$\triangle_\varepsilon x(0) = 0. \tag{19}$$

В силу (12) и (18) имеет место равенство:

$$\dot{\psi}_\varepsilon \triangle_\varepsilon x + \psi_\varepsilon d(\triangle_\varepsilon x)/dt = -A^*\psi_\varepsilon \triangle_\varepsilon x - \psi_\varepsilon U_\varepsilon \triangle_\varepsilon x - \psi_\varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}(t) + \zeta\triangle_\varepsilon x(t), t)\triangle_\varepsilon x(t) -$$

$$-\frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t)+\theta\triangle_\varepsilon x(t), t)\triangle_\varepsilon x(t) + \psi_\varepsilon A\triangle_\varepsilon x + \psi_\varepsilon U_\varepsilon(t)x_\varepsilon - \psi_\varepsilon \overline{U}(t)\overline{x} + \psi_\varepsilon g(x_\varepsilon, t) - \psi_\varepsilon g(\overline{x}, t).$$

Так как A^* – сопряженный оператор, то $A^*\psi_\varepsilon\triangle_\varepsilon x = \psi_\varepsilon A\triangle_\varepsilon x$. Учитывая, что $\dot{\psi}_\varepsilon\triangle_\varepsilon x+ +\psi_\varepsilon\dot{\triangle_\varepsilon} x = d(\psi_\varepsilon\triangle_\varepsilon x)/dt$, получим:

$$\psi_\varepsilon\triangle_\varepsilon x|_0^T = -\int\limits_0^T \frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t) + \theta\triangle_\varepsilon x(t), t)\triangle_\varepsilon x(t)dt + \int\limits_0^T (\psi_\varepsilon\triangle_\varepsilon U\overline{x})dt.$$

Учитывая (8), (13), (19), получим:

$$\triangle_\varepsilon x(T)\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\overline{x}(T) + \xi\triangle_\varepsilon x(T))\triangle_\varepsilon x(T) = -\int\limits_0^T \frac{\partial F_1}{\partial x}(\overline{x}(t) + \theta\triangle_\varepsilon x(t), t)\triangle_\varepsilon x(t)dt +$$

$$+\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} (\psi_\varepsilon\triangle_\varepsilon U\overline{x})dt.$$

С учетом предыдущих преобразований приращение функционала принимает вид:

$$\triangle J_0 = \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} (F_2(U_\varepsilon(t), t) - F_2(\overline{U}(t), t))dt + \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} (\psi_\varepsilon\triangle_\varepsilon U\overline{x})dt. \tag{20}$$

4. Необходимые условия оптимальности

Введем в рассмотрение функцию Понтрягина (Гамильтона) [25, с. 302]

$$H(t, U) = \psi_0 U(t)\overline{x} + F_2(U, t). \tag{21}$$

Здесь ψ_0 – сопряженная функция для этой задачи, удовлетворяющая системе (10)-(11).

Теорема 1. *Пусть в поставленной оптимизационной задаче критерий качества имеет вид (7), функции $F_1(x,t)$, $F_2(U,t)$, $\Phi(x)$, непрерывны по совокупности своих переменных, производные по Гато $\partial F_1/\partial x$, $\partial\Phi/\partial x$ непрерывны по совокупности своих переменных, удовлетворяют условию Липшица по переменной x, существует оптимальное управление $\overline{U}$ сильно кусочно-непрерывное во всех точках отрезка $[0,T]$. Тогда функция Понтрягина (21) во множестве $G \subset [\mathfrak{B}]$ достигает своего минимума в точке $\overline{U}(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,T]$, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва функции $\overline{U}$: $H(t,\overline{U}) = \min\limits_{U\in G\subset[\mathfrak{B}]} H(t,U)$.*

Доказательство. Пусть точка $\tau \in [0,T]$ является точкой непрерывности функции $\overline{U}(\cdot)$. В силу кусочной непрерывности этой функции таким свойством обладают все точки отрезка $[0,T]$, за исключением, быть может, конечного числа. Найдем вариацию функционала δJ_0. Введем обозначения:

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau}(F_2(U,t) - F_2(\overline{U}(t),t))dt, \quad I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau}(\psi_0(U-\overline{U}(t))\overline{x})dt,$$

$$I_3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau}((\psi_\varepsilon - \psi_0)(U-\overline{U}(t))\overline{x})dt.$$

Из (20) слудует равенство $\delta J_0 = I_1 + I_2 + I_3$. Вычислим пределы I_1, I_2, I_3 по отдельности. По теореме о среднем [25, с. 147-148] существует число $0 < \mu < 1$ такое, что справедливо равенство

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[F_2(U,\tau-\mu\varepsilon) - F_2(\overline{U}(\tau-\mu\varepsilon),\tau-\mu\varepsilon)]\varepsilon = F_2(U,\tau) - F_2(\overline{U}(\tau),\tau).$$

Аналогично справедливо равенство $I_2 = \psi_0(\tau)U\overline{x}(\tau) - \psi_0(\tau)\overline{U}(\tau)\overline{x}(\tau)$. Рассмотрим предел I_3. В силу неравенства Гельдера имеет место неравенство $\|(\psi_\varepsilon - \psi_0)(U-\overline{U})\overline{x}\| \leqslant \|\psi_\varepsilon - \psi_0\|_{\mathfrak{B}^*}\cdot\|U-\overline{U}\|_{[\mathfrak{B}]}\cdot\|\overline{x}\|_{\mathfrak{B}}$. Из Леммы 2 следует оценка $\|\psi_\varepsilon - \psi_0\|_{\mathfrak{B}^*} < \varepsilon_1$. Решение $\overline{x}$ уравнения (1) является непрерывной функцией, норма непрерывной функции также является непрерывной функцией, следовательно, на отрезке $[0,T]$ норму функции $\overline{x}$ можно ограничить константой: $\|\overline{x}\|_{\mathfrak{B}} < K_1$, $\overline{U}(t)$ – кусочно-непрерывная оператор-функция, значением которой в каждый момент является линейный ограниченный оператор, U – линейный ограниченный оператор. Норму управления можно оценить следующим образом: $\|U-\overline{U}\|_{[\mathfrak{B}]} \leqslant K_2$, отсюда вытекает справедливость оценки $\|(\psi_\varepsilon-\psi_0)(U-\overline{U})\overline{x}\| \leqslant K_3\cdot\varepsilon_1$, где K_2, K_3 – константы. На основании выше приведенных оценок справедливы следующие неравенства:

$$\Big|\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau}((\psi_\varepsilon - \psi_0)(U-\overline{U}(t))\overline{x})dt\Big| < \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau}|(\psi_\varepsilon - \psi_0)(U-\overline{U}(t))\overline{x}|dt < \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau}(\varepsilon_1\cdot C_3)dt < \varepsilon_2.$$

Таким образом, справедливо равенство $I_3 = 0$.

В результате имеем выражение для вариации функционала: $\delta J_0 = H(\tau,U) - H(\tau,\overline{U})$. Т.к $\overline{U}$ – оптимально, получаем $\delta J_0 \geqslant 0$, то есть $H(\tau,\overline{U}) \leqslant H(\tau,U)$. Это справедливо для любых значений $U \in G \subset [\mathfrak{B}]$ и для любых моментов времени $\tau \in [0,T]$ кроме, быть может, точек разрыва функций $\overline{U}(\cdot)$, что и требовалось доказать. □

Заключение

Доказанная теорема представляет собой необходимые условия оптимальности для однородной системы в банаховом пространстве. Известно, что широкий класс систем авторепродукции может быть задан в банаховом пространстве конечных мер через системы динамики вероятностной меры, причем исследование их может быть сведено только к изучению однородного случая. Таким образом, доказанная теорема удобна для решения задач оптимального управления такими системами, поскольку эффективно учитывает их специфику.

Список литературы

[1] Егоров Ю.В. Об оптимальном управлении в банаховом пространстве // Успехи математических наук. 1963. Т. 18, № 4(112). С. 211–213.

[2] Гамкрелидзе Р.В. Харатишвили Г.Л. Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах // Известия Академии наук СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая. 1969. Т. 33, № 4. С. 781–839.

[3] Аваков Е.Р. Необходимые условия минимума для нерегулярных задач в банаховых пространствах. Принцип максимума для анормальных задач оптимального управления Труды Математического института АН СССР. 1988. Т. 185. С. 3–29.

[4] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А Задачи на экстремум при наличии ограничений // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 149, № 4. С. 759–762.

[5] Волин Ю.М., Островский Г.М. О принципе максимума в банаховом пространстве // Кибернетика. 1969. Т. 5. С. 132–135.

[6] Варга Д. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

[7] Матвеев А.С. Задачи оптимального управления с запаздываниями общего вида и фазовыми ограничениями // Известия Академии наук СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая. 1988. Т. 52, № 6. С. 1200–1229.

[8] Ргуен Бионг. О существовании оптимального управления нелинейным операторным уравнением в банаховых пространствах // Современный анализ и его приложения. Киев: Наукова думка, 1989. С. 141–146.

[9] Матвеев А.С., Якубович В.А. Невыпуклые задачи глобальной оптимизации // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, № 5. С. 229–253.

[10] Тихомиров В.М. Гладко-аппроксимативно-выпуклый принцип и его приложения // Владикавказский математический журнал. 2005. Т. 7, № 4. С. 52–66.

[11] Сугак Д.В. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления системой эллиптического типа высокого порядка с фазовыми ограничениями // Вестник молодых ученых. Серия: Прикладная математика и механика. 2000. Т. 3. С. 57–69.

[12] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.

[13] Горбань А.Н. Обход равновесия: уравнения химической кинетики и их термодинамический анализ. Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1984. 226 с.

[14] Розоноэр Л.И., Седых Е.Л. Об эволюционных механизмах самовоспроизводящихся систем // Автоматика и телемеханика. 1979. № 2, 3. С. 110–119, 119–130.

[15] Кузенков О.А., Кузенкова Г.В. Оптимальное управление системами авторепродукции // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 26–37.

[16] Кузенков О.А. Исследование динамической системы вероятностных мер Радона // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 591–596.

[17] Кузенков О.А. Задача Коши для эволюционного уравнения с неограниченным оператором в семействе вероятностных мер Радона // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 11. С. 1535—1542.

[18] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 830 с.

[19] Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.

[20] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.

[21] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

[22] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

[23] Кузенков О.А., Новоженин А.В. Оптимальное операторное управление в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 1. С. 132–142.

[24] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

[25] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.

Библиографическая ссылка

Кузенков О.А., Новоженин А.В. Оптимальное управление системой авторепродукции в банаховом пространстве // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 7–20.

Сведения об авторах

1. **Кузенков Олег Анатольевич**
   доцент кафедры численного и функционального анализа Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

   Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, ННГУ.
   E-mail: Kuzenkov_o@mail.ru.

2. **Новоженин Алексей Владимирович**
   инженер кафедры численного и функционального анализа Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

   Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, ННГУ.

OPTIMAL CONTROL FOR SELF-REPLICATING SYSTEMS IN BANACH SPACE

Kuzenkov Oleg
Associate professor of Numerical and Functional Analysis department,
Lobachevsky State University of Nizhnii Novgorod
Russia, 603950, Nizhnii Novgorog, 23 Gagarina av. E-mail: Kuzenkov_o@mail.ru

Novozhenin Alexey
Engineer of Numerical and Functional Analysis department,
Lobachevsky State University of Nizhnii Novgorod
Russia, 603950, Nizhnii Novgorog, 23 Gagarina av.

Received 27.09.2014, revised 30.09.2014.

Necessary conditions of optimality are proved in the form of the maximum principle for a self-replicating system in Banach space.

Keywords: self-replicating system, Banach space, optimal control, maximum principle.

Bibliographic citation

Kuzenkov O.A., Novozhenin A.V. Optimal control for self-replicating systems in banach space. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 7–20. (in Russian)